**Examen de Análisis de Variable Compleja.**
**Cuarto curso de Matemáticas (Metodología).**
**10 de Julio de 1996.**

1. Pruébese, integrando una conveniente función a lo largo de la poligonal cerrada $\Gamma(a,b) = [a,\, b,\, b+\pi i,\, a+\pi i,\, a]$ $(a < 0 < b)$, que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^{2x}+e^{-2x}} \operatorname{sen} 2x\, dx = \pi \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{e^{\pi}+e^{-\pi}}$$

2. Determinar el número de ceros del polinomio
$$P(z) = z^4 - z^2 + 2z + 4$$
a) en el disco unidad;
b) en el primer cuadrante.

3. Probar que el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z-1| > \rho\}$ es isomorfo al anillo $A(0;1,2)$ para conveniente valor de $\rho$ con $0 < \rho < 1$, y describir todas las transformaciones de Möbius que aplican $\Omega$ sobre $A(0;1,2)$.

4. Teorema de Morera y teorema de convergencia de Weierstrass para sucesiones de funciones holomorfas.

5. Principio de identidad para funciones holomorfas. Ceros de una función holomorfa.

6. Lema de Schwarz. Automorfismos conformes del disco unidad.

7. Teorema de Riemann (fundamental de la representación conforme). Enunciarlo; dar un esquema de la demostración del mismo y enunciar los resultados fundamentales que juegan un papel importante en su demostración.

8. Sea $f$ una función holomorfa en el disco unidad verificando que $f(0) = 0$. Probar que la serie $\sum_{n\geq 1} f(z^n)$ converge en el disco unidad y que su suma es una función holomorfa en el disco unidad.

9. Sea $f$ una función holomorfa e inyectiva en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ verificando que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Pruébese que hay un número complejo $\alpha \neq 0$ tal que o bien $f(z) = \alpha z$ $\forall z \in \mathbb{C}^*$, o bien $f(z) = \dfrac{\alpha}{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}^*$.

Nota: Se elejirá una de las preguntas 4 o 5 y también una de las preguntas 6 o 7. Los ejercicios 8 y 9 son optativos.